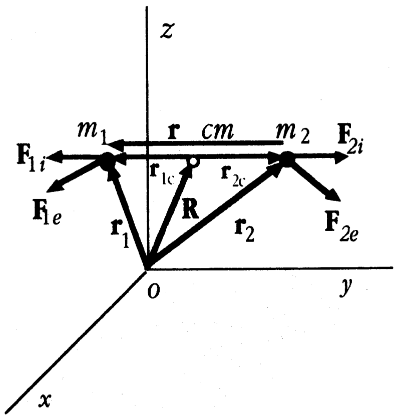
$$\mathbf{F}_{1i} = -\mathbf{F}_{2i} \tag{48-4}$$

أما $\mathbf{F}_{1e}$ و $\mathbf{F}_{2e}$ فهما القوى الخارجية المؤثرة على الجسيم m_1 و m_2، على الترتيب، اللتين نفترض أنهما تحققان العلاقة:

$$\frac{\mathbf{F}_{1e}}{m_1} = \frac{\mathbf{F}_{2e}}{m_2} \tag{49-4}$$



الشكل (14-4)

لنعرف الآن مركز كتلة الجسيمين بالعلاقة:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{50-4}$$

كما نعرف المسافة النسبية بينهما بالعلاقة:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \tag{51-4}$$

عندئذ نجد من العلاقتين الأخيرتين:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r} \tag{52-4}$$

و

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r} \qquad (53-4)$$

بتعويض $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ في (47-4) وجمع المعادلتين الناتجتين نجد:

$$(m_1 + m_2)\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}_{1r} + \mathbf{F}_{2e} \qquad (54-4)$$

من ناحية أخرى، نضرب أولى المعادلتين (47-4) بـ m_2 والثانية بـ m_1 ونطرح فنجد:

$$(m_1 m_2)\ddot{\mathbf{r}} = (m_1 + m_2)\mathbf{F}_{1i} \qquad (55-4)$$

بوضع:

$$M = m_1 + m_2$$

وتعريف **الكتلة المختزلة** *(reduced mass)* μ بالعلاقة:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad (56-4)$$

تؤول المعادلتان (54-4) و (55-4) إلى:

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}_e \qquad (57-4)$$

و

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{1i} \qquad (58-4)$$

حيث $\mathbf{F}_e$ محصلة القوى الخارجية المؤثرة على الجسيمين:

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_{1e} + \mathbf{F}_{2e} \qquad (59-4)$$

تعطى (57-4) معادلة حركة مركز الكتلة بالنسبة لمناط الإسناد الثابت كأنه جسم كتلته الكلية M خاضع لمحصلة القوى الخارجية الكلية $\mathbf{F}_e$. بينما تعطي (58-4) حركة جسم كتلته μ موجود في موضع الجسيم m_1 ويتحرك بالنسبة لـ m_2 خاضعاً للقوة F_{1i} التي يؤثر بها هذا الأخير عليه.

يمكن استعمال المعادلتين (52-4) و(53-4) لإيجادسرعة الجسيمين ثم طاقتهما الحركية الكلية، فنجد:

$$T = \tfrac{1}{2}MV^2 + \tfrac{1}{2}\mu v^2 \qquad (60-4)$$

حيث:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} \qquad (61-4)$$

التي تدل على سرعة الكتلة المختزلة بالنسبة لـ m_2، بينما

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}} \qquad (62-4)$$

التي تدل على سرعة مركز الكتلة بالنسبة لمناط الإسناد الثابت O. (برهن 4-60).

4 - 12 الاحداثيات بالنسبة لمركز الكتلة *(Center of Mass Coordinates)*

وجدنا في الفقرة السابقة أنه إذا كان لدينا جسيمين m_1 و m_2 في الموضعين r_1 و r_2 بالنسبة لمراقب ثابت كما في الشكل (14-4)، فإن موضع مركز كتلتهما (C) يعطى بالعلاقة:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2)$$

كما وجدنا أنه يمكن تعيين موضع الجسيمين بالنسبة لمركز كتلتهما من العلاقتين:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{\mu}{m_1}\mathbf{r}$$

و

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{\mu}{m_2}\mathbf{r}$$

لنحدد الآن موضع الجسيمين بالنسبة لمركز كتلتهما فنلاحظ من الشكل (14-4) أن:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \mathbf{r}_{1c} & \Rightarrow \quad \mathbf{r}_{1c} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R} \\ \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} + \mathbf{r}_{2c} & \Rightarrow \quad \mathbf{r}_{2c} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R} \end{cases} \tag{63-4}$$

بالتعويض عن r_1 و r_2 من المعادلتين (52-4) و (53-4) نجد:

$$\mathbf{r}_{1c} = \frac{\mu}{m_1}\mathbf{r} \tag{64-4}$$

و

$$\mathbf{r}_{2c} = -\frac{\mu}{m_2}\mathbf{r} \tag{65-4}$$

العلاقات السابقة صحيحة دوماً، كما أن مشتقاتها بالنسبة للزمن صحيحة أيضاً، أي أن:

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}} = \frac{1}{M}(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2) \tag{66-4}$$

حيث $\mathbf{V}$ سرعة مركز الكتلة، كما نجد من المعادلة (63-4) و (64-4):

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{V} + \frac{\mu}{m_1}\mathbf{v} \tag{67-4}$$

و

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{V} - \frac{\mu}{m_2}\mathbf{v} \tag{68-4}$$

حيث تدل $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ على سرعتي الجسيمين بالنسبة لمناط الإسناد O (المراقب الثابت)، بينما تدل $\mathbf{v}$ على السرعة النسبية بينهما.

أخيراً نجد من المعادلتين (64-4) و(65-7) أن سرعتي الجسيمين بالنسبة لمركز كتلتهما، $\mathbf{v}_{1c}$ و $\mathbf{v}_{2c}$، بدلالة السرعة النسبية بينهما هما:

$$\mathbf{v}_{1c} = \frac{\mu}{m_1}\mathbf{v} \tag{69-4}$$

و

$$\mathbf{v}_{2c} = -\frac{\mu}{m_2}\mathbf{v} \qquad (70-4)$$

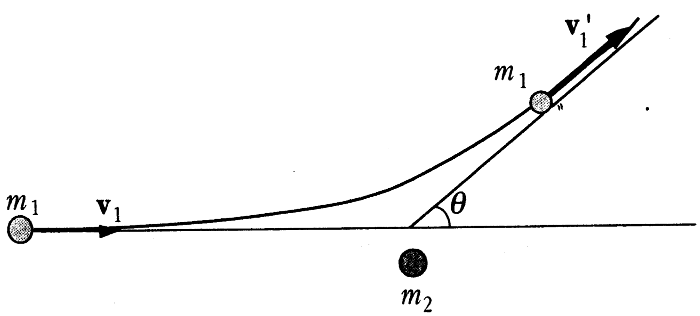
نستنتج من (69-4) و (70-4) أن الزخم الخطي الكلي للجسيمين بالنسبة لمركز الكتلة يساوي الصفر دوماً، لأن:

$$m_1\mathbf{v}_{1c} + m_2\mathbf{v}_{2c} = 0 \qquad (71-4)$$

سنستفيد من هذه المعادلة عند دراسة اصطدام جسيمين ببعضهما وتشتتهما بعد ذلك لإيجاد العلاقة بين زاوية التشتت بالنسبة لمراقب ثابت في المختبر ومراقب يتحرك مع مركز الكتلة.

4 - 13 اصطدام جسيمين ببعضهما وتشتت رزرفورد

ليكن لدينا جسيماً m_1 يتحرك بسرعة $\mathbf{v}_1$ (بالنسبة لمراقب في المختبر) وآخر m_2 ساكن، ولنفترض أن القوى الوحيدة المؤثرة عليهما هى قوى داخلية (مثل التجاذب الكتلي أو التجاذب و التنافر الكهربائي). فيقترب الجسيم m_1 من m_2 إلى مسافة معينة ثم ينحرف عن مساره بزاوية θ، كما هو موضح بالشكل (15-4) .



الشكل (9-4)

بما أن $\mathbf{v}_2=0$ لذلك نجد من العلاقة (66-4) أن:

$$\mathbf{V} = \frac{m_1}{M}\mathbf{v}_1 = \frac{\mu}{m_2}\mathbf{v}_1 \qquad (72-4)$$

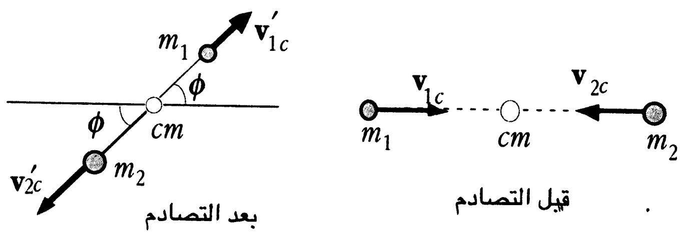
كما نجد من العلاقات (4-63) أن:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = \mathbf{V} + \mathbf{v}_{1c} \\ \mathbf{v}_2 = \mathbf{V} + \mathbf{v}_{2c} \end{cases} \qquad (73-4)$$

تكمن أهمية العلاقات (4-72) و(4-73) في أنها تربط بين سرعة أي من الجسيمين في المختبر بالنسبة لمراقب ثابت ($\mathbf{v}_1$ أو $\mathbf{v}_2$) مع سرعة هذا الجسيم بالنسبة لمراقب يتحرك مع مركز الكتلة ($\mathbf{v}_{1c}$ أو $\mathbf{v}_{2c}$)، كما أنها صحيحة قبل وبعد التصادم.

من جهة أخرى، عرّفنا زاوية التشتت بين سرعة الجسيم القادم قبل التصادم وسرعته بعد التصادم، أي بين المسار الابتدائي والنهائي. فنجد من الشكل (4-15) أن زاوية التشتت θمحصورة بين$\mathbf{v}_1$ و$\mathbf{v}'_1$ بالنسبة لمراقب في المختبر.

أما بالنسبة لمراقب يتحرك مع مركز الكتلة فان حادثة التصادم والتشتت تبدو له مختلفة بعض الشيء لأن الزخم الخطي الكلي للجسمين قبل وبعد التصادم بالنسبة لهذا المراقب يجب أن يكون مساوياً للصفر، بحسب العلاقة (4-72)، لذلك تظهر حادثة التصادم بالنسبة لمركز الكتلة كما هو مبين بالشكل (4-16).



الشكل (4-16)

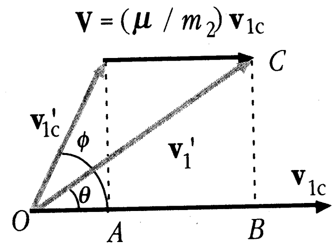
الآن: نجد من أولى العلاقتين (4-73) والمعادلة (4-72) أن:

$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{V} + \mathbf{v}'_{1c} \qquad (74-4)$$

بالتالي فإن:

$$\mathbf{v}'_1 = \frac{\mu}{m_2}\mathbf{v}_{1c} + \mathbf{v}'_{1c} \qquad (75-4)$$

نستنتج من العلاقة (4-75) أنه إذا رسمنا المتجهين $\mathbf{v}'_{1c}$ و $\mu\,\mathbf{v}_{1c}/m_2$ فان محصلتهما هي $\mathbf{v}'_1$، كما في الشكل (4-17) حيث نلاحظ أن اتجاه السرعة الابتدائية للجسيم m_1 هو واحد سواء بالنسبة لمركز الكتلة أو بالنسبة للمختبر.



الشكل (4-17)

ونجد من الشكل (4-17) أن:

$$\tan\theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{OA}+\overline{AB}} \qquad (76-4)$$

لكن

$$\overline{BC} = \mathbf{v}'_{1c}\sin\phi$$

و

$$\overline{OA} = \mathbf{v}'_{1c}\cos\phi$$

و

$$\overline{AB} = \frac{\mu}{m_2}\mathbf{v}_{1c}$$

فيكون:

$$\tan\theta = \frac{v'_{1c}\sin\phi}{v'_{1c}\cos\phi + (\mu / m_2)v_{1c}} \qquad (77-4)$$

أو

$$\tan\theta = \frac{\sin\phi}{\gamma+\cos\phi} \qquad (78-4)$$

حيث:

$$\gamma = \frac{m_1 v_1}{v'_{1c}(m_1 + m_2)} \tag{79-4}$$

يمكن البرهان أنه في حالة التصادم المرن (Q=0) فإن:

$$\gamma = \frac{m_1}{m_2} \tag{80-4}$$

بينما تعطى في حالة التصادم غير المرن بالعلاقة:

$$\gamma = \frac{m_1}{m_2}[1 - \frac{Q}{T}(1 + \frac{m_1}{m_2})]^{-1/2} \tag{81-4}$$

حيث T الطاقة الحركية للجسيم القادم طبعاً.

نلاحظ أخيراً أنه في حادثة التصادم فإن معادلتي حفظ الزخم والطاقة في منظومة مركز الكتلة تكتبان بالشكل:

$$\mathbf{p}_{1c} + \mathbf{p}_{2c} = \mathbf{p}'_{1c} + \mathbf{p}'_{2c} = 0 \tag{82-4}$$

و

$$\frac{p_{1c}^2}{2m_1} + \frac{p_{2c}^2}{2m_1} = \frac{p'^2_{1c}}{2m_1} + \frac{p'^2_{1c}}{2m_1} + Q \tag{83-4}$$

حيث Q كمية الطاقة الضائعة أو المكتسبة في التصادم .

يمكن كتابة العلاقة (4-82) بالشكل:

$$\frac{p_{1c}^2}{2\mu} = \frac{p'^2_{1c}}{2\mu} + Q \tag{83-4}$$

حيث μ الكتلة المختزلة.

4 - 14 أمثلة

❐ **مثل 44** في تجربة تشتت نووي تطلق حزمة من جسيمات α(نواة ذرة الهيليوم) طاقتها 4 MeV على اسطوانة صغيرة تحوي غاز الهيليوم فتتشتت بعض جسيمات α بزاوية $30°$ في منظومة المختبر. جد الطاقة الحركية للجسيمات المتشتتة والنوى المرتدة، وزاوية التشتت في منظومة مركز الكتلة.

الحل: في حالة تصادم جسمين متماثلين بشكل مرن فإن الزاوية بينهما بعد التصادم هي$90°$ أي أن$\phi_1+\phi_2=90°$، لذا نكتب من حفظ الزخم والشكل(4-10):

$$p_1 = p_1' \cos\phi_1 + p_2' \cos\phi_2 = p_1' \cos\phi_1 + p_2' \sin\phi_1$$

و

$$0 = p_1' \sin\phi_1 - p_2' \sin\phi_2 = p_1' \sin\phi_1 - p_2' \cos\phi_1$$

بما أن $\phi_1=30°$ لذلك نجد من حل المعادلتين السابقتين:

$$p_1' = p_1 \cos\phi_1 = p_1 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

و

$$p_2' = p_1 \sin\phi_1 = p_1 \frac{1}{2}$$

وتؤول معادلة حفظ الطاقة الحركية في هذه الحالة إلى:

$$T_1' = \frac{p_1'^2}{2m_1} = \frac{3}{4}\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{3}{4}T = 3 \text{ MeV}$$

و

$$T_2' = \frac{p_2'^2}{2m_1} = \frac{1}{4}\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{1}{4}T = 1 \text{ MeV}$$

ويمكن إيجاد زاوية التشتت في منظومة مركز الكتلة من العلاقة (4-72) مباشرة:

$$\theta = 2\phi_1 = 60°$$ ❐

❐ **مثل 5-4** يصطدم پروتون كتلته m وسرعته $\mathbf{v}_0$ بنواة ذرة هيليوم ساكنة كتلتها $4m$ فيتشتت بزاوية $45°$ عن مساره الأصلي. ماسرعة كل جسيم بعد التصادم إذا كانت الطاقة الضائعة Q تساوي ربع طاقة الپروتون الابتدائية، ومازاوية التشتت في منظومة مركز الكتلة؟

الحل: نكتب مبدأ حفظ الزخم الخطي:

$$m\mathbf{v}_{0p} = m_p \mathbf{v}_p + m_\alpha \mathbf{v}_\alpha$$

بملاحظة أن $m_a=4m_p$ وأخذ مركبتي العلاقة السابقة نجد:

$$v_0 = v_p' \cos 45° + 4v_\alpha'$$

و

$$0 = v_p' \sin 45° - 4v_\alpha' \sin\phi$$

كما نكتب من حفظ الطاقة:

$$\tfrac{1}{2} m_p v_0^2 = \tfrac{1}{2} m_p v_p'^2 + \tfrac{1}{2}(4m_p)v_\alpha'^2 + \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2} m_p v_0^2)$$

ومنه:

$$16v_\alpha' = 3v_0^2 - 4v_p'^2$$

بحل المعادلات الثلاث السابقة بالنسبة لـ v'_p، وأخذ الجذر الموجب فقط، نجد:

$$v_p' = \frac{v_0}{10}(\sqrt{2} \pm \sqrt{42}) \approx 0.79v_0$$

كما نجد مركبتي سرعة الپروتون النهائية:

$$v_{px}' = v_{py}' = \frac{v_p'}{\sqrt{2}} \approx 0.56v_0$$

كذلك نجد سرعة ألفا بعد التصادم:

$$v_\alpha' \approx 0.18v_0$$

بالاستفادة من معادلات حفظ الزخم نجد زاوية تشتت ألفا:

$$\tan\phi = \frac{v_p'}{\sqrt{2}v_0 - v_p'} \approx 1.26 \quad \Rightarrow \quad \phi \approx 51.2^\circ$$

الآن: لإيجاد زاوية تشتت البروتون في منظومة مركز الكتلة نستخدم العلاقة (4-79) و (4-81) فنجد:

$$\theta \approx 57.3^\circ$$ ❒

مسائل

1-4 ماموقع وزخم مركز كتلة منظومة مؤلفة من كتل متساوية ($m = 1$ kg) موجودة في المواضع ولها السرع التالية: $\mathbf{r}_1 = \mathbf{i}+\mathbf{j}$ ،$\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i}$ و $\mathbf{r}_2 = \mathbf{j}+\mathbf{k}$ ،$\mathbf{v}_2 = \mathbf{j}$ و $\mathbf{r}_3 = \mathbf{k}$ ، $\mathbf{v}_3 = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

2-4 ماالطاقة الحركية للمنظومة المذكورة في المسألة 4-1 ومازخمها الزاوي بالنسبة للمبدأ O؟

3-4 يقع قرص رقيق نصف قطره a في المستوى xy بحيث يقع مركزه عند نقطة المبدأ وكثافة النصف الموجود فوق محور السينات σ بينما كثافة النصف الأسفل σ'. جد مركز كتلة القرص.

4-4 حدد باستخدام نظريتي بابس مركز كتلة مثلث قائم الزاوية طولي ضلعيه a و b إذا علمت أن حجم مخروط مساحة قاعدته A وارتفاعه h هو $Ah/3$.

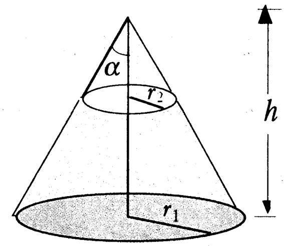
5-4 برهن أن نظرية بابس الثانية صحيحة حتى في الحالة التي يتقاطع فيها محور الدوران مع السطح شريطة أن نأخذ الفرق بين الحجمين الناتجين عن دوران القطعتين الحاصلتين من تقاطع محور الدوران مع السطح.

6-4 جد مركز كتلة سلك منحني على شكل نصف دائرة نصف قطرها a. جد أيضاً أنصاف أقطار الدوران حول المحاور ox وoy وoz التي تمر من مركز الكتلة حيث oz عمودي على سطح الدائرة.

7-4 (أ) جد العلاقة التي تعطي نصف قطر الدوران لقطعة مستقيمة طولها l حول

محور يمر من أحد طرفيها ويصنع زاوية αمعها. (ب) استخدم هذه النتيجة لحساب عزم عطالة أضلاع هرم متساوي الأضلاع حول محور يمر من مركزه وأحد رؤوسه.

8-4 جد مركز كتلة مخروط كتلته m، وارتفاعهh، وزاويته الرأسية α، حول محور تناظره وحول محور يمر من ذروته عمودياً على محور التناظر. استفد من نتائجك لايجاد مركز كتلة مقطع من المخروط، كما هو موضح بالشكل (4-18).



الشكل (4-18)

9-4 مامركز كتلة كل من الأجسام المتجانسة التالية:(أ) منحني على شكل ربع دائرة؟ (ب) سطح على شكل ربع قرص. (جـ) المساحة المحصورة بين المنحني $x^2=by$ والخط $y=b$؟ (د) الحجم المحصور بين السطح $z=(x^2+y^2)/b$ و المستوي $z=b$؟

10-4 جد مركز كتلة نصف كرة صلبة نصف قطرها a وتتغير كثافتها خطياً مع البعد عن المركز من الصفر عند المركز إلى ρ_0 عند الطرف. ماالجواب اذا كانت الكثافة ثابتة دوماً؟

11-4 أين يقع مركز كتلة كرة صلبة نصف قطرها R اقتطع من داخلها جزء كروى نصف قطره $R/2$ ويقع مركزه على بعد $R/2$ من مركز الكرة الأصلية؟

12-4 تنطلق رصاصة كتلتها m بسرعة v_0 بالنسبة لبندقية كتلتها M. ماسرعتها بالنسبة للأرض؟

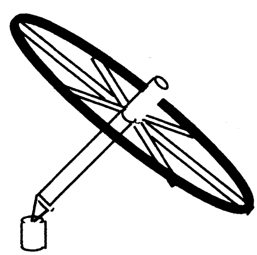
13-4 تنطلق قذيفة من مدفع بزاوية $45°$ وسرعة v_0 وعند وصولها لأعلى ارتفاع لها تنشطر إلى قسمين يسقط أحدها مباشرة للأسفل بسرعة $2v_0$. ماسرعة واتجاه القسم الثاني بعد الانفجار مباشرة؟

14-4 يتألف **البندول القذفي** *(ballistic pendulum)* من قطعة خشبية كتلتها M معلقة

بحبل طوله L مثبت من طرفه الآخر بسقف المختبر ويستخدم لمعرفة سرعة رصاصة كتلتهاm قبل اصطدامها به مباشرة عندما يكون في وضع شاقولي إذ تنحرف المنظومة بعد اختراق الرصاصة للبندول واستقرارها بداخله عن الشاقول بزاوية صغيرة θ. جد السرعة الابتدائية للرصاصة بدلالة M و m و L و θ.

15-4 تعلق كفة ميزان كتلتهاm_1 بذراعٍ مهملة الكتلة طولهاL ويمكنها الدوران حول نقطة ثابتة. ماالزاوية التي ستصل إليها الكفة عندما تهوي من زاوية θ بحيث أنها تغرف كمية m_2 من الرمل عند وصولها لأخفض نقطة من مسارها؟

16-4 برهن أن محور الجيروسكوب(*gyroscope*) الموضح في الشكل (4-19) سيدور بسرعة زاوية $\omega_p = g\,l/R^2\omega^2$ حول oz عندما يدور دولاب الجيروسكوب بسرعة زاوية ω حول محوره بفرض أن كتلته M متوضعه على محيطه و R نصف قطر الدولاب و l بعد مركز كتلته عن نقطة الارتكاز.



الشكل (4-19)

17-4 يدور كوكب نصف قطره a حول الشمس في مدار دائري نصف قطره r_0 بسرعة زاوية ω، كما يدور حول محوره بسرعة زاوية ω_0 بشكل عمودي على مستوي مساره حول الشمس. جد العلاقة التي تعطي تغيرات نصف القطرr بدلالة ωالتي تتناقص نتيجة قوى المد والجزر المتشكلة على سطح الكوكب لوجوده على مقربة من الشمس.

18-4 يصطدم جسيم m_1 بآخرm_2 ساكن ليتشتت الأول بزاويةθ_1والثاني بزاوية θ_2. ماالنسبة m_1/m_2 إذا كان التصادم تام المرونة؟

19-4 يصطدم جسيمm_1 طاقته الحركية T_0 بآخرm_2 ساكن اصطداماً مرناً فيتشتت الأخير صانعاً زاوية θ_2مع اتجاه m_1 الأصلي. برهن أن الطاقة التي يكسبهاm_2

ستكون أكبر مايمكن في تصادم رأسي *(head-on)* وأن الطاقة التي يخسرها m_1 في هذه الحالة تساوي $4m_1 m_2 T_0/(m_1+m_2)^2$.

20-4 يصطدم پروتون زخمه p_1 بنواة ساكنة اصطداماً مرناً ويتشتت بزاوية θ وزخم p_2 ماكتلة النواة بدلالة النسبة p_2/p_1 ؟ كيف يمكن التأكد من أن التصادم كان تام المرونة فعلاً؟

21-4 يصطدم جسيم m_1 بآخر m_2 ساكن اصطداماً مرناً. (أ) ماالزاوية التي يجب أن نضع عندها كاشفاً *(detector)* لتحري الجسيمات m_1 التي فقدت نصف زخمها الابتدائي؟ (ب) ماالنسبة m_1/m_2 التي تجعل هذه المسألة قابلة للحل؟

22-4 برهن أن معامل الارتداد e يساوي الواحد في التصادمات المرنة.

23-4 ماالطاقة الضائعة (أو المكتسبة) Q في تصادم رأسي بين جسيم m_1 سرعته v_1 وآخر m_2 ساكن مع العلم أن معامل الارتداد هو e؟

24-4 يصطدم جسيم m_1 زخمه p_1 بشكل مرن مع آخر m_2 زخمه p_2 ويتحرك باتجاه معاكس للأول. ماالزخم النهائي لـ m_1 إذا تشتت بزاوية θ_1؟

25-4 تصطدم كرة بلياردو طاقتها الحركية T_0 بأخرى مماثلة لها ساكنة على طاولة أفقية ملساء فتشتت الكرتان بزاويتان $\pm\theta$ بالنسبة للمسار الأصلي للأولى. برهن أنه إذا لم تتحول الطاقة لأي شكل آخر فإن الطاقة الحركية الدورانية التي اكتسبتها الكرتان نتيجة التصادم" تساوي $[1-(1/2\cos^2\theta)]T_0$.

26-4 ينشطر جسيم غير مشحون m في جناح فقاعات فينتج جسيمان آخران m_1 و m_2 زخمهما p_1 و p_2 ، على الترتيب، الزاوية بينهما α. ماقيمة واتجاه زخم m الأصلي وماالقيمة Q لهذا التفاعل ؟

27-4 تسقط كرة صغيرة من ارتفاع h فوق الأرض على مستو آخر يميل بزاوية α فترتد عنه لترتفع في الهواء وتعود للاصطدام به مرة ثانية، وهكذا دواليك. برهن أنه إذا كان معامل الارتداد e فإن الكرة سترتطم بالمستوي في المرة الثانية عند نقطة تبعد مسافة $4\varepsilon(1+\varepsilon)h\sin\alpha$ إلى أسفل من نقطة الارتطام الأولى.

4-28 برهن أن مجموع المسافات الشاقولية التي ترتفع إليها الكرة المذكورة في المسألة 4-27 قبل أن تنتهي الارتدادات كلياً هو $h(1+\varepsilon^2)/(1-\varepsilon^2)$.

4-29 تتحرك ثلاث كتل متماثلة على خط مستقيم، في لحظة معينة يكون لها المواضع والسرع التالية $(-1,0,+1)$ و $(4v_0,2v_0,v_0)$، على الترتيب. ماالسرع النهائية للكتل إذا اصطدمت الكيل ببعضها وكانت كل التصادمات تامة المرونة؟

4-30 تمر سفينة فضاء كتلتها m وسرعتها v_0 بالقرب من القمر فتصل لأقرب مسافة R عن مركزه بسرعة عمودية على سرعة دوران القمر حول الأرض v. برهن أنه إذا مرت السفينة خلف القمر فإن طاقتها ستزداد واحسب مقدار الزيادة مفترضاً أن كتلة القمر M أكبر بكثير من كتلة السفينة.

4-31 يقترب جسم كتلته m وسرعته v_0 من جسم آخر كتلته $2m$ ساكن يبعد عن خط مسار الأول s. ماقيمة واتجاه السرعة النهائية لكل منهما؟

4-32 يصطدم جسيم m زخمه p_1 باخر مماثل ساكن فيصير زخمهما p'_1 و p'_2 والزاوية بينهما φ. برهن أن الطاقة الضائعة تساوي $Q=p'_1p'_2\cos\varphi/2m$.

4-33 في تفاعل نووي يصطدم جسيم أول m_1 بآخر m_2 ساكن فينتج جسيمين m_3 و m_4. ماطاقة m_1 بدلالة القيمة Q للتفاعل والكتل m_1 و m_3 و m_4 وزاويتي التشتت θ_3 و θ_4 للجسيمين الناتجين، على الترتيب؟ ماذا يحدث إذا كانت $Q=0$؟

4-34 تشتت كومبتون *(Compton Scattering)*: بحسب الميكانيك الكمي؛ فإن لكل فوتون طول موجته λ طاقة hc/λ وزخم خطي h/λ، حيث h ثابت پلانك و c سرعة الضوء. في تشتت كومبتون؛ تصطدم حزمة من الأشعة السينية (فوتونات طاقتها بضعة آلاف كيلوإلكترون ڤولت) طول موجتها λ، عند اختراقها لأي مادة، بالإلكترونات الحرة الموجودة فيها فتشتت نتيجة لذلك وتنفذ بطول موجي λ' منحرفة عن مسارها الأصلي بزاوية φ. استخدم الأشكال النسبية للطاقة والزخم لبرهان أن التصادم بين فوتون وإلكترون ساكن كتلته يؤدي لتغيير طول موجة الأول بمقدار $\lambda'-\lambda=h(1-\cos\varphi)/mc$، وأن الإلكترون سيتحرك باتجاه يصنع زاوية θ مع الاتجاه الأصلي للفوتون معطاة بالعلاقة $\tan\theta=\sin\varphi/\{[1+(h/\lambda mc)](1-\cos\varphi)\}$.